Clase 14. Fórmulas de Cauchy

Si f es analítica en un abierto que contiene al disco cerrado definido por la circunferencia C(p, r), el comportamiento de f en C determina la conducta de f en el interior del disco. Esto lo escribimos así

14.1 Fórmula Integral de Cauchy

Sea $f(z)$ una función analítica en un disco abierto D y sea C una curva cerrada simple orientada positivamente en D. Para cualquier punto $a \notin C$, a en el interior de la región acotada por C se tiene que

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)} dz.$$

Para la demostración consideramos la función F definida en el interior de la región encerrada por C como

$$F(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} & \text{para } z \neq a \\ f'(a) & \text{en } z = a. \end{cases}$$

Vemos que F es derivable en todo z, $z \neq a$, y que F es continua en el punto a. Así F será analítica en la región considerada. Luego, $\int_C F(z)\, dz = 0$ y, en consecuencia, $\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{(z-a)}\, dz = f(a) \int_C \frac{dz}{z-a}$.

Usando el teorema de la deformación y el ejercicio **??** se tiene que $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$ y así

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)} dz.$$

Observación 14.1. Conociendo los valores de f en C y que f es analítica en la región encerrada por C, podemos calcular los valores $f(a)$ con a en el interior de la región.

Observación 14.2. Si $a \in D$, $a \notin C$ y a no está en el interior de la región entonces es claro que $\int_C \frac{f(z)}{z-a}\, dz = 0$.

Observación 14.3. Si D es un dominio, o si D es un conjunto abierto y convexo, entonces la función $F(z)$ es derivable en D excepto en el punto a, donde es continua. Es analítica en D ya que la integral definida por $g(z) = \int_{[a,z]} f(w)\, dw$, $z \in D$, donde $[a, z]$ es el segmento (parametrizado) de recta que va desde a hasta z, está bien definida ($[a, z] \subset D$) y $\frac{dg(z)}{dz} = f(z)$.

Observación 14.4. Esta fórmula de representación integral también es válida en cualquier región donde se verifique el teorema de Green.

Si pensamos en el punto a como una variable y cambiamos la notación, re-escribimos la fórmula integral en la forma

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)} \, dw.$$

14.2 Fórmula de Cauchy para derivadas

Consideremos una función $f(z)$ analítica en una región arbitraria abierta Ω. Para cada punto $a \in \Omega$, tomemos una circunferencia C centrada en a completamente contenida en Ω. La fórmula de Cauchy es válida y para cada z en la región interior a C es

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)} \, dw.$$

Suponiendo que en la integral se pueda derivar bajo el signo de integración se obtiene que

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)^2} \, dw$$

y en general

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} \, dw.$$

Re-escribimos $f^{(n)}(a) = \dfrac{n!}{2\pi i} \displaystyle\int_C \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} \, dz.$

De esta manera, simplemente suponiendo que se puede derivar bajo el signo integral y aplicando el principio de inducción se tiene la siguiente generalización de la fórmula integral de Cauchy

Teorema 14.1 (Fórmula Integral para derivadas)**.** *Sea C una curva cerrada simple orientada positivamente y sea $f(z)$ una función analítica en un abierto D que contiene a C y a su región interior. Si a es cualquier punto en la región interior a C, entonces*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} \, dz \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

.

Teorema 14.2 (Desigualdades de Cauchy)**.** *Sea C una circunferencia con centro en a y radio r. Sea $f(z)$ una función analítica en un conjunto abierto D que contiene a C y a su región interior. Entonces*

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{Mn!}{r^n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

suponiendo que f es acotada en C y $|f(z)| \leq M$ en C.

Demostración : Parametrizamos la circunferencia por $z = z(t) = a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Usando la fórmula integral para derivadas encontramos que

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(a)| &\leq \frac{n!}{2\pi} \int_C \frac{|f(z)|}{|z-a|^{n+1}}\,|dz| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_C \frac{M}{r^{n+1}}|dz| \\ &= \frac{Mn!}{2\pi r^{n+1}} \int_C |dz| = \frac{Mn!}{2\pi r^{n+1}}(2\pi r) = \frac{Mn!}{r}. \end{aligned}$$

□

Con el siguiente teorema se muestra que las funciones complejas $\operatorname{sen} z$, $\cos z$ son no acotadas, en contraste con las correspondientes funciones reales.

Teorema 14.3 (Liouville)**.** *Sea $f(z)$ una función analítica en todo el plano complejo $\mathbb{C}$. Si f es acotada entonces f es constante.*

Demostración : Por ser f acotada en $\mathbb{C}$, existe $M > 0$ (constante real) tal que $|f(z)| \leq M$, $z \in \mathbb{C}$. Para cualquier punto z, $z \in \mathbb{C}$, consideramos una circunferencia C de centro z y radio r, $C = C(z, r)$. Como f es analítica particularizando $n = 1$ en la desigualdad de Cauchy es $|f'(z)| \leq \frac{M}{r}$. Tomando $r \to \infty$, como f es analítica y acotada en $\mathbb{C}$ se sigue cumpliendo la desigualdad y así $f'(z) = 0$. Luego $f'(z) = 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$ y f es constante. □

Una función compleja analítica en todo $\mathbb{C}$ se dice función entera.

Una aplicación del teorema de Liouville es

Teorema 14.4 (Teorema Fundamental del Algebra)**.** *Si $p(z)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes reales o complejos, entonces la ecuación $p(z) = 0$ tiene al menos una raiz.*

Demostración : Sea $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$, $a_k \in \mathbb{C}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

Si $p(z) \neq 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$ entonces podemos escribir

$$p(z) = z^n \left(\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n \right).$$

Para $|z|$ suficientemente grande, es decir, para $|z| > r$ con r real no-negativo $r >> 1$, se observa que $2n\frac{|a_k|}{|a_n|} < |z|^n$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Luego $\frac{|a_k|}{|z|^n} < \frac{|a_n|}{2n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ y así

$$\left|\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z}\right| < \frac{|a_n|}{2n} + \frac{|a_n|}{2n} + \cdots + \frac{|a_n|}{2n} = \frac{|a_n|}{2}$$

y de

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n\right| &\geq |a_n| - \left|\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z}\right| \\ &\geq |a_n| - \frac{|a_n|}{2} = \frac{|a_n|}{2},\end{aligned}$$

obtenemos que

$$|p(z)| = |z|^n \left|\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n\right| \geq |z|^n \frac{|a_n|}{2}$$

para $|z| > r$ suficientemente grande.

La función $g(z) = \frac{1}{p(z)}$ es analítica en $\mathbb{C}$ ya que $p(z) \neq 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$ (y p es analítica en $\mathbb{C}$) y de $|g(z)| < \frac{2}{|a_n|\,|z^n|}$ es $\lim_{|z|\to\infty} |g(z)| = 0$. Así $g(z)$ es acotada en $|z| > r$.

Por ser g continua, ella es acotada en el disco $|z| \leq r$. Luego, g es acotada en $\mathbb{C}$ y siendo analítica, por el teorema de Liouville $g(z)$ es constante, al igual que $p(z)$, lo que es una contradicción. Así $p(z) = 0$ tiene al menos una solución. $\square$

Ejemplo 14.1. Para calcular $\int_{|z|=1} \frac{e^{\alpha z}}{z^{n+1}} dz$, con $\alpha \in \mathbb{C}$ (orientación anti-horaria), vemos que la función $f(z) = e^{\alpha z}$ es analítica en $\mathbb{C}$ y por la fórmula integral de Cauchy ($a = 0$)

$$\int_{|z|=1} \frac{e^{\alpha z}}{z^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(0) = \frac{2\pi i}{n!} \alpha^n.$$

Ejemplo 14.2. Calcule $I = \int_C \frac{e^{mz}}{az^2 - (1+a^2)iz - a} dz$, siendo C la circunferencia $|z| = 1$ orientada anti-horariamente y $-1 < a < 1$, $a \neq 0$.

Factorizando el denominador, las raices son $z_1 = ai$, $z_2 = \frac{i}{a}$ y $az^2 - (1+a^2)iz - a = a(z - ai)(z - \frac{i}{a})$.

Como $|z_2| = \frac{1}{a} > 1$, z_2 está por fuera de la región, mientras que z_1 está en la región interior a C.

La función $f(z) = \frac{e^{mz}}{(z - \frac{i}{a})}$ es analítica en la región encerrada por C y aplicando la fórmula de Cauchy ($f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz$, cambiando a por ai) se tiene que

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{a} \int_C \frac{e^{mz}}{(z - ai)(z - \frac{i}{a})} dz = \frac{1}{a} \int_C \frac{e^{mz}/(z - \frac{i}{a})}{(z - ai)} dz \\ &= \frac{1}{a} 2\pi i f(ai) = \frac{1}{a} 2\pi i \frac{e^{mai}}{ai - \frac{i}{a}} = \frac{2\pi e^{mai}}{a^2 - 1}.\end{aligned}$$

Ejemplo 14.3. Sea $f(z)$ una función entera que satisface $|f(z)| \leq k|z|^2$, $k > 0$ (real) para todo $z \in \mathbb{C}$. Pruebe que $f(z)$ es un polinomio homogeneo de segundo grado.

Demostremos que $f''(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Para cualquier $z \in \mathbb{C}$, consideramos la circunferencia $C(z, R)$, definida por $|w - z| = R$ y parametrizada por $w(t) = z + Re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Usando la fórmula de Cauchy es $f'''(z) = \dfrac{3}{2\pi i} \displaystyle\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^4} dw$. Así

$$|f'''(z)| \leq \frac{6}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(w)|}{|w-z|^4} |dw| \leq \frac{3}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{k|w|^2}{R^4} |dw|.$$

Usando la desigualdad $|w| - |z| \leq |w - z| = R$ es $|w| \leq |z| + R$ y

$$\begin{aligned} |f'''(z)| &\leq \frac{3}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(|z| + R)^2}{R^4} dw = \frac{3}{\pi} \frac{(|Z| + R)^2}{R^4} 2\pi R \\ &= 6 \left(\frac{|z|^2}{R^3} + \frac{2|z|}{R^2} + \frac{1}{R} \right). \end{aligned}$$

Como f es entera podemos tomar $R \to \infty$ y así $f'''(z) = 0$, $z \in \mathbb{C}$. La función $g(z) = f''(z)$ satisface entonces $g'(z) = 0$, por lo cual g es constante, es decir, $f''(z) = a$ (a constante compleja). Escribimos $f(z) = az^2 + bz + d$.

Note que $f(0) = 0$ ya que $|f(z)| \leq k|z|^2$. Por otra parte, $f(0) = d$, así que $d = 0$.

También $f'(0) = 0$:

$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z},$$

por lo que

$$0 \leq |f'(0)| = \lim_{z \to 0} \left| \frac{f(z)}{z} \right| = \lim_{z \to 0} \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \lim_{z \to 0} \frac{k|z|^2}{|z|} = 0.$$

Por lo tanto $|f'(0)| = 0$ y $f'(0) = 0$.

Por ser $f(z) = az^2 + bz$, $f'(z) = 2az + b$ y, en consecuencia, $b = 0$. Así $f(z) = az^2$ es un polinomio homogeneo de segundo grado.

Observación 14.5. Como $f(0) = 0$ y $f'(0) = 0$, considerando la función

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z^2} & \text{si } z \neq 0 \\ \frac{f''(0)}{2} & \text{en } z = 0, \end{cases}$$

vemos que $\varphi(z)$ es analítica en $\mathbb{C}$ y acotada. Aplicando el teorema de Liouville es $\varphi(z)$ constante. Así $\frac{f(z)}{z^2} = A$ y $f(z) = Az^2$.

Clase 15. Series de Potencias

Una serie infinita de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots$$

donde z_0, c_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ son números complejos y z denota una variable compleja se llamará una serie (de potencias) en potencias de $(z - z_0)$. Los números c_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ son los coeficientes de la serie de potencias. A veces diremos serie de potencias en un entorno de z_0 (o centrada en z_0).

Estas series de potencias se pueden llevar a la expresión (numérica) conocida $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, escribiendo $z_k = c_{k-1}(z - z_0)^{k-1}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

El siguiente teorema mostrará que el conjunto de todos los z en los cuales la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-z_0)^n$ converge absolutamente es el plano complejo $\mathbb{C}$ ó el interior de un círculo centrado en z_0 ó el único punto z_0.

Teorema 15.1. *Cada serie de potencias* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-z_0)^n$ *tiene un* radio de convergencia *R tal que si $0 < R < \infty$, la serie converge absolutamente en $|z - z_0| < R$ y diverge en $|z - z_0| > R$; cuando $R = 0$, la serie converge sólo en $z = z_0$ y si $R = +\infty$, la serie converge (absolutamente) para todo $z \in \mathbb{C}$. El número real R está dado por*

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}},$$

suponiendo que existe este límite.

Definición 15.1. Cuando $0 < R < \infty$, el círculo $\{z \ : \ |z - z_0| < R\}$ se dice el círculo de convergencia (de la serie). En la frontera $\{z \ : \ |z - z_0| = R\}$ puede converger en algunos puntos y diverger en otros.

Definición 15.2. Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ converge a $f(z)$ para cada punto $z \in D \subset \mathbb{C}$, diremos que la serie representa la función f en D y escribimos $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-z_0)^n$.

Escribiremos los tres siguientes teoremas sin demostración.

Teorema 15.2 (Taylor). *Sea $f(z)$ una función analítica en el disco $D = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - z_0| < R\}$. Entonces para cada $z \in D$ se cumple que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

Es decir, la serie converge al valor de $f(z)$ para todo $z \in D$.

Definición 15.3. Esta serie es la serie de Taylor de $f(z)$ en un entorno del punto z_0. Si $z_0 = 0$ se obtiene la serie (de MacLaurin)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Teorema 15.3. *Una serie de potencias representa una función continua en cada punto interior al disco de convergencia, es decir, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ representa una función continua $f(z)$ para cada z en el disco de convergencia $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - z_0| < R\}$, siendo $R \neq 0$ el radio de convergencia de la serie.*

Además, en el disco (círculo) de convergencia una serie de potencias puede ser integrada o derivada término a término y representa una función analítica.

Teorema 15.4. *Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ en $|z - z_0| < R$ entonces*

a) $\displaystyle\int_{z_0}^{z} f(w)dw = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{z_0}^{z} (w - z_0)^n dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(z - z_0)^{n+1}.$

b) f es analítica en cada punto interior al disco de convergencia.

c) $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z - z_0)^{n-1}$ en $|z - z_0| < R$.

Se puede probar entonces que la representación de una función analítica por medio de una serie de potencias en un entorno de un punto es única y es precisamente la serie de Taylor.

Teorema 15.5. *Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ converge a $f(z)$ en el disco $D = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - z_0| < R\}$ entonces esta serie es la serie de Taylor de f alrededor de z_0.*

Demostración : La prueba consiste en derivar la expresión

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots$$

término a término y evaluar en el punto $z = z_0$. Así por ejemplo

$$\begin{aligned} f'(z) &= c_1 + 2c_2(z - z_0) + 3c_3(z - z_0)^2 + \cdots + nc_n(z - z_0)^{n-1} + \cdots \\ f'(z_0) &= c_1, \text{ es decir, } c_1 = f'(z_0). \\ f''(z) &= 2c_2 + 3 \cdot 2(z - z_0) + \cdots + n(n-1)c_n(z - z_0)^{n-2} + \cdots \\ f''(z_0) &= 2c_2, \text{ es decir, } c_2 = \frac{f''(z_0)}{2}, \end{aligned}$$

y así sucesivamente. □

Escribimos la serie de Taylor de algunas funciones elementales.

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ en $|z| < 1$.

ii) $\displaystyle e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$.

iii) $\displaystyle\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$.

iv) $\displaystyle\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$.

v) $\displaystyle\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$.

vi) $\displaystyle\operatorname{senh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$.

vii) $\displaystyle\operatorname{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} - \frac{z^4}{4!} + \cdots$, en $|z| < 1$.

15.1 Series de Laurent

Consideremos una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n$ convergente en $|w| < r$ con $r > 0$. Si sustituimos w por $\frac{1}{z-z_0}$, la serie resultante $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$ es convergente en $|z - z_0| > \frac{1}{r}$.

Llamando $r_1 = \frac{1}{r}$, esta serie converge entonces en la región exterior al disco $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r_1\}$. En esta región, ella representa una función $g(z)$ analítica, así que

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \text{ en } |z - z_0| > r_1.$$

Supongamos ahora que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge en $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r_2,\ r_2 > 0\}$, representando allí a una función $h(z)$ analítica,

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < r_2.$$

Si $r_1 < r_2$, la función $f(z)$ definida por $f(z) = g(z) + h(z)$ es analítica en la región intersección, es decir, en el anillo $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$. Así se tiene que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{en } r_1 < |z - z_0| < r_2.$$

Con las sustituciones $b_n = a_{-n}$, $n = 1, 2, \ldots$ y cambiando la constante $(a_0 + b_0)$ y en su lugar escribiendo a_0, podemos expresar la suma de las dos series anteriores así

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad r_1 < |z - z_0| < r_2.$$

Definición 15.4. Diremos que la serie $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ es la serie de Laurent de la función f y que el anillo $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ es su región de convergencia.

Podemos así escribir

Teorema 15.6. *Una serie de la forma $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ representa una función analítica en el anillo $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$, donde r_1 es el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ y r_2 es el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.*

El siguiente teorema (de Laurent) es esencialmente el recíproco del teorema anterior y es una generalizacíon del teorema de Taylor.

Teorema 15.7 (Laurent)**.** *Sea f una función analítica en el anillo $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2,\ r_1 < r_2\}$. Para cada $z \in \mathcal{D}$ se tiene que $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, donde*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

y C es cualquier curva simple cerrada en $\mathcal{D}$ que contiene a z_0 en su región interior. La integral sobre C es en el sentido positivo.

Observación 15.1. Para ver que la serie de Laurent es una generalización de la serie de Taylor, suponemos que la función $f(z)$ es analítica en todo el disco $\mathcal{D}_1 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - z_0| < r_2\}$. Entonces todas las funciones $f(w)(w - z_0)^{n+1}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ son analítica en $\mathcal{D}_1$ y así $a_{-1}, a_{-2}, a_{-3}, \ldots$ son todos nulos y la serie que resulta es la serie de Taylor de f ya que de

$$f^{(n)}(z_0) = n!a_n = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}dw$$

se obtiene que

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}dw = a_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Observación 15.2. Para el anillo de convergencia $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ de la serie de Laurent de f existen dos casos extremos

a) Si $r_1 \to 0$ entonces $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ 0 < |z - z_0| < r_2\}$, es decir, el disco abierto de radio r_2 sin el centro.

b) Si $r_2 \to \infty$ entonces $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ r_1 < |z - z_0|\}$, es decir, la región exterior al disco de radio r_1 y centro z_0.

Observación 15.3. Las propiedades que se refieren a series de potencias se extienden a las series de la forma $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$. En particular, las series de Laurent se pueden derivar e integrar término a término en el anillo de convergencia, además de la unicidad.

Observación 15.4. Las series de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ y $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ se pueden sumar, restar (término a término) y multiplicar en sus regiones comunes (intersección).

Si se dividen dos series de potencias o dos series de tipo Laurent, se obtiene otra serie (de potencias o de tipo Laurent, dependiendo de las series) en la región común (intersección). Así, por ejemplo, si $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ en $\mathcal{D}_1 : \ r_1 < |z - z_0| < r_2$ y si $g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ en $\mathcal{D}_2 : \ R_1 < |z - z_0| < R_2$, con $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \mathcal{D} \neq \emptyset$, entonces

a) El producto $f(z)g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ en $\mathcal{D}$, con

$$c_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

b) Para $g(z) \neq 0$ en $\mathcal{D}$, existe una serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ y números reales $r_1 < r_2$ tales que

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \quad \text{en } r_1 < |z-z_0| < r_2.$$

Ejemplo 15.1. Halle la función a la cual converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ y el círculo de convergencia.

Solución. Partiendo de la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \frac{1}{1-z} \quad \text{en } |z| < 1$$

y derivando término a término

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = 1 + 2z + \cdots + n z^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(1-z)^2} \quad \text{en } |z| < 1.$$

Multiplicando por z,

$$z \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \frac{z}{(1-z)^2}, \text{ es decir, } \sum_{n=1}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2} \quad \text{en } |z| < 1.$$

Derivando de nuevo

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^{n-1} = 1 + 2^2 z + 3^2 z^2 + \cdots + n^2 z^{n-1} + \cdots = \frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(1-z)^2}\right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^{n-1} = \frac{1-3z}{(1-z)^3} \quad \text{en } |z| < 1.$$

Multiplicando por z será

$$z \sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^{n-1} = \frac{z(1-3z)}{(1-z)^3} \quad \text{en } |z| < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = \frac{z(1-3z)}{(1-z)^3} \quad \text{en } |z| < 1.$$

Ejemplo 15.2. Hallar la serie de Taylor de la función $f(z) = \dfrac{z}{i+z}$ en un entorno de $z = 0$ y encontrar su radio de convergencia (de la serie).

Solución. Escribimos $f(z) = \dfrac{z}{i(1+\frac{z}{i})} = \dfrac{z}{i}\dfrac{1}{1+\frac{z}{i}}$.

Usando la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ en $|z| < 1$ se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$ en $|z| < 1$ y así

$$\frac{1}{1+\frac{z}{i}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{z}{i}\right)^n \quad \text{en } |z| < 1 \text{ ya que } \left|\frac{z}{i}\right| = |z|.$$

Luego

$$f(z) = \frac{z}{i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^n}{i^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{n+1}}{i^{n+1}} \quad \text{en } |z| < 1.$$

Ejemplo 15.3. Halle la serie de Laurent de la función $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 3z + 2}$ en potencias de $(z-2)$ en

a) el *disco pinchado* $0 < |z-2| < 1$.

b) la región $|z-2| > 1$.

Solución.

a) Escribimos $\dfrac{1}{z-1} = \dfrac{1}{1+(z-2)}$. De la serie geométrica se obtiene que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n = \dfrac{1}{1+(z-2)}$ en $|z-2| < 1$.

Luego, si $0 < |z-2| < 1$ es

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-2)}\frac{1}{(z-1)} = \frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (z-2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (z-2)^{n-1} = \frac{1}{z-2} - 1 + (z-2) - \cdots \\ &= \sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-2)^n \end{aligned}$$

b) Si $|z-2| > 1$ es $\frac{1}{|z-2|} < 1$. Así

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z-2)+1} = \frac{1}{(z-2)}\frac{1}{(1+\frac{1}{z-2})}.$$

Desarrollando por serie geométrica (ya que $\left|\frac{1}{z-2}\right| < 1$) es

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z-2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^{n+1}}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-2)}\frac{1}{(z-1)} = \frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^{n+2}} = \sum_{n=-2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^n} \end{aligned}$$

Clase 16. Singularidades y Residuos

Un punto z_0 se dice punto singular (o singularidad) de la función $f(z)$ si f no es derivable en z_0 pero cada entorno de z_0 contiene al menos un punto z_1 en el cual f es analítica, es decir, f es analítica en cierto entorno reducido de z_1.

Se dice que z_0 es un punto singular aislado (singularidad aislada) de f si f no es derivable en z_0 pero existe un entorno reducido de z_0 en donde f es analítica, es decir, f es analítica en $\mathcal{N}'(z_0, \epsilon) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, 0 < |z - z_0| < \epsilon,\ \epsilon > 0\}$.

Ejemplo 16.1. La función $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ es analítica en $\mathbb{C}$ excepto en los puntos $z_1 = i$, $z_2 = -i$. Ambos puntos son singularidades aisladas de f.

Ejemplo 16.2. La función $g(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\frac{1}{z})}$ tiene un número infinito de singularidades aisladas. Estas son $z_k = \frac{1}{k\pi}$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

El punto $z = 0$ es un punto singular pero no es aislado ya que todo entorno de $z = 0$ contiene un número infinito de puntos singulares.

16.1 Clasificación de Singularidades

Supongamos que z_0 es un punto singular aislado de la función f y que z_1 es el punto singular de f más próximo a z_0. Sea r la distancia entre ellos. Como f es analítica en el anillo $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \,:\, 0 < |z - z_0| < r\}$, usando el teorema de Laurent se obtiene que

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \, (z - z_0)^n \quad \forall\, z \in \mathcal{D},$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Definición 16.1. La parte principal de f en el punto singular aislado z_0 es aquella parte de la serie que envuelve las potencias negativas de $(z - z_0)$, es decir

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots$$

y el coeficiente importante es a_{-1}, al cual llamaremos *el residuo de f en z_0* y escribiremos

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(w)\, \mathrm{d}w.$$

Aparecen 3 tipos de puntos singulares aislados estudiando la parte principal de la serie:

Singularidad Removible Supongamos que todos los coeficientes correspondientes a potencias negativas valen cero, es decir, $a_n = 0 \quad \forall\, n = -1, -2, \ldots$, entonces $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n \quad (z \neq z_0)$.

Definiendo (o redefiniendo) $f(z_0)$ como $a_0 = \lim_{z \to z_0} f(z)$ se tiene que f es analítica. Una singularidad de este tipo se dice removible.

Ejemplo 16.3. La función $g(z)$ definida por

$$g(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} z}{z} & z \neq 0 \\ 3 & z = 0 \end{cases}$$

tiene una serie de potencias para $|z| > 0$ dada por

$$g(z) = 3 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots$$

Como $\lim_{z \to 0} g(z) = 3$, podemos remover la singularidad en $z = 0$ para así obtener una función entera $f(z) = g(z)$ si $z \neq 0$ y $f(0) = \lim_{z \to 0} \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots}{z} = 1$.

Singularidad Esencial En la parte principal, un número infinito de los a_{-n}, $n = 1, 2, \ldots$ son diferentes de cero. En este caso se dice que z_0 es un punto singular esencial.

Ejemplo 16.4. La función $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ para $|z| > 0$ tiene una serie de Laurent dada por

$$f(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{1}z^3 + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} + \cdots$$

As $z = 0$ es una singularidad esencial.

Polo En la parte principal todos los a_{-n} valen cero, excepto un número finito de ellos. Supongamos que $a_{-m} \neq 0$ y que $a_k = 0$ para todo $k < -m$. En este caso se dice que z_0 es un polo de orden m (multiplicidad) de la función f. La serie de Laurent toma la forma

$$f(z) = a_{-m}(z - z_0)^{-m} + a_{-m+1}(z - z_0)^{-m+1} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (a_{-m} \neq 0).$$

En particular, si $m = 1$ se hablará de un polo simple.

Ejemplo 16.5. La función $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^3}$ para $|z| > 0$ tiene una serie de Laurent

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^2} + \cdots$$

Así $z = 0$ es un polo de orden 2.

Podemos caracterizar los polos de las funciones de acuerdo al siguiente teorema.

Teorema 16.1. *Sea $f(z)$ analítica en un entorno del punto z_0, excepto en dicho punto. Entonces f tiene un polo de orden m, $m \in \mathbb{N}$, si y sólo si la función $\lambda(z)$ dada por*

$$\lambda(z) = (z - z_0)^m f(z)$$

tiene una singularidad removible en z_0 y $\lim_{z\to z_0} \lambda(z) \neq 0$.

Demostración : Si f tiene un polo de orden m entonces

$$f(z) = a_{-m}(z - z_0)^{-m} + a_{-m+1}(z - z_0)^{-m+1} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

con $a_{-m} \neq 0$.

Multiplicando por $(z - z_0)^m$ se obtiene

$$(z - z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z - z_0) + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+m} \quad (z \neq z_0),$$

es decir

$$\lambda(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z - z_0) + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+m} \quad (\text{para } z \neq z_0).$$

Así $\lambda(z)$ tiene una singularidad removible en $z = z_0$ y $\lim_{z\to z_0} \lambda(z) = a_{-m} \neq 0$.

Recíprocamente, supongamos que se cumple la condición en $\lambda(z) = (z - z_0)^m f(z)$. Como $\lambda(z)$ tiene una singularidad removible, su serie de Laurent en un entorno de z_0 tiene coeficientes c_{-n} iguales a cero ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Luego,

$$(z - z_0)^m f(z) = \lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Así

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - z_0)^{-m} \lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^{-m+n} \\ &= \frac{c_0}{(z - z_0)^m} + \frac{c_1}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{m-1}}{(z - z_0)} + c_m + \sum_{k=m+1}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k-m}. \end{aligned}$$

Como $c_0 = \lim_{z\to z_0} \lambda(z) \neq 0$, vemos que f tiene un polo de orden m en z_0. $\square$

16.2 Ceros (Raices)

Si la función $f(z)$ es analítica en un dominio $\mathcal{D}$ y el punto z_0 está en $\mathcal{D}$ entonces para cada disco $\{z \in \mathcal{D} \,:\, |z - z_0| < R\}$ (contenido en $\mathcal{D}$) es valida la serie de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

Si $a_0 = a_1 = \cdots = a_{m-1} = 0$ y si $a_m \neq 0$ entonces

$$f(z) = a_m(z - z_0)^m + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \cdots = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

Podemos escribir que

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - z_0)^m \left[a_m + a_{m+1}(z - z_0) + a_{m+2}(z - z_0)^2 + \cdots\right] \\ &= (z - z_0)^m \lambda(z). \end{aligned}$$

Se dirá en este caso que f tiene un cero de orden (multiplicidad) m en $z = z_0$. Luego,

Teorema 16.2. *z_0 es un cero de orden m de una función analítica $f(z)$ si y sólo si $f(z) = (z - z_0)^m \lambda(z)$, donde $\lambda(z)$ es una función analítica en un entorno de z_0 y $\lambda(z_0) \neq 0$.*

También, por el teorema 16.1, tenemos

Teorema 16.3. *El punto z_0 es un polo de orden m de $f(z)$ si y sólo si*

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \lambda(z),$$

para alguna función $\lambda(z)$ analítica en un entorno de z_0 y $\lambda(z_0) \neq 0$.

Observación 16.1. Si f es analítica en un entorno de z_0, $f \not\equiv 0$ y z_0 es un cero de f entonces existe un entorno reducido de z_0 que no contiene otros ceros de f. En otras palabras, los ceros de f son aislados.

Escribiendo $f(z) = (z - z_0)^m \lambda(z)$, λ analítica y $\lambda(z_0) \neq 0$, es λ continua en un entorno de z_0. Luego, para $k = \frac{|\lambda(z_0)|}{2}$ existe un entorno $\mathcal{N}(z_0, \delta)$ de z_0, $\mathcal{N}(z_0, \delta) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - z_0| < \delta\}$, tal que $|\lambda(z) - \lambda(z_0)| < k$, $z \in \mathcal{N}(z_0, \delta)$. Así

$$|\lambda(z)| = |\lambda(z_0) - (\lambda(z_0) - \lambda(z))| \geq |\lambda(z_0)| - |\lambda(z) - \lambda(z_0)| > 2k - k = k$$

para $z \in \mathcal{N}(z_0, \delta)$ y $\lambda(z) \neq 0$ en $\mathcal{N}(z_0, \delta)$.

Luego, $\mathcal{N}'(z_0, \delta) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, 0 < |z - z_0| < \delta\}$ es un entorno reducido de z_0 donde $f(z) = (z - z_0)^m \lambda(z) \neq 0$.

Observación 16.2. Si $z = z_0$ es un polo de orden m de la función $f(z)$ entonces $|f(z)| \to \infty$ cuando $z \to z_0$.

Se tiene $f(z) = (z - z_0)^{-m}\lambda(z)$, $\lambda(z_0) \neq 0$ y $\lambda(z)$ analítica en un entorno de z_0. Como λ es continua en z_0, existe un entorno de z_0, $\mathcal{N}(z_0, \delta) = \{z \in \mathbb{C} \;:\; |z - z_0| < \delta\}$ tal que $|\lambda(z)| > \frac{1}{2}|\lambda(z_0)|$, $z \in \mathcal{N}(z_0, \delta)$. Luego, para $z \in \mathcal{N}(z_0, \delta)$ es

$$|f(z)| = |z - z_0|^{-m}|\lambda(z)| > \frac{1}{2}|\lambda(z_0)|\,|z - z_0|^{-m},$$

de donde $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$.

16.3 Residuos

Sea z_0 un punto singular aislado de la función f. Sean z_1 la singularidad de f mas próxima a z_0 y R la distancia entre ellos. Así f es analítica en el anillo $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \;:\; 0 < |z-z_0| < R\}$ y por el teorema de Laurent se tiene

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n\,,\; z \in \mathcal{D} \quad ; \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\;\mathrm{d}z$$

donde tomamos C la circunferencia $C(z_0, r)$ de centro z_0 y radio $0 < r < R$.

Definición 16.2. El coeficiente $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\;\mathrm{d}z$ es llamado el residuo de f en z_0 y se denota por $\mathrm{Res}(f(z), z_0)$.

El siguiente teorema de Cauchy es muy importante.

Teorema 16.4 (Residuos)**.** *Sea C una curva simple cerrada orientada positivamente y sea $\mathcal{D}$ un conjunto abierto que contiene a C y a su región interior. Si f es analítica en $\mathcal{D}$, excepto (a lo sumo) en un número finito de puntos singulares $z_1, z_2, \ldots, z_N$ contenidos en la región interior definida por C entonces*

$$\int_C f(z)\;\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{n=1}^{N}\mathrm{Res}(f(z), z_n).$$

Demostración : Aplicamos el teorema de la deformación con circunferencias $C_1, C_2, \ldots, C_N$ centradas en los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_N$ respectivamente y de radios suficientemente pequeos (ver figura 2) de manera que estén contenidas en la región interior a C y no se corten. Todas con la misma orientación de C.

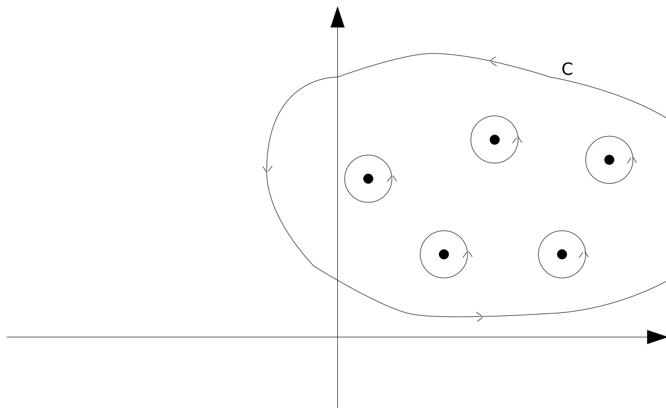

Figura 1: Aplicando el teorema de la deformación para obtener el teorema de los residuos.

Se tiene que $\int_C f(z)\ \mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{N} \int_{C_n} f(z)\ \mathrm{d}z$ y así

$$\int_C f(z)\ \mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{N} 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_n) = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Res}(f(z), z_n),$$

ya que $\operatorname{Res}(f(z), z_i) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{C_i} f(z)\ \mathrm{d}z$, $i = 1, 2, \ldots, N$. □

Podemos calcular el residuo de una función f en un polo z_0 de orden m con facilidad.

Teorema 16.5. *Sea f una función analítica en un entorno reducido de z_0. Si z_0 es un polo de orden m de $f(z)$ entonces*

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} \left((z - z_0)^m f(z)\right).$$

Demostración : Por tener f un polo de orden m en z_0 es

$$f(z) = a_{-m}(z - z_0)^{-m} + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z - z_0\right)^n \quad (a_{-m} \neq 0).$$

Luego,

$$(z - z_0)^m f(z) = a_{-m} + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+m}.$$

Derivando $(m-1)$ veces para obtener a_{-1} es

$$\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}[z^{m-1}]}\left((z-z_0)^m f(z)\right) = (m-1)!a_{-1} + \text{suma de términos con potencias de } (z-z_0).$$

Tomando límite a ambos lados:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\left((z-z_0)^m f(z)\right) = (m-1)!\,\mathrm{Res}(f(z), z_0)$$

$$\text{es decir,} \qquad \mathrm{Res}(f(z), z_0) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}[z^{m-1}]}\left((z-z_0)^m f(z)\right).$$

□

En particular, si z_0 es un polo simple $(m=1)$ será $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)]$.
En la práctica el siguiente resultado es importante.

Teorema 16.6. *Consideremos dos funciones analíticas $p(z), q(z)$ es un entorno de z_0 con $p(z_0) \neq 0$. Sea $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$. Entonces:*

a) $f(z)$ tiene un polo de orden m en z_0 si y sólo si z_0 es un cero de $q(z)$ de orden m.

b) Si z_0 es un polo simple de f (cero de $q(z)$ de multiplicidad 1) entonces

$$\mathrm{Res}(f(z), z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

c) Si z_0 es un polo doble $(m=2)$ de f entonces

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \frac{2p'(z_0)}{q''(z_0)} - \frac{2}{3}\frac{p(z_0)q'''(z_0)}{[q''(z_0)]^2}$$

.

Demostración : a) Si z_0 es un cero de $q(z)$ de orden m, podemos escribir $q(z) = (z-z_0)^m\lambda(z)$ con $\lambda(z_0) \neq 0$ y $\lambda(z)$ analítica en un entorno de z_0. Luego,

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z)}{(z-z_0)^m\lambda(z)} \text{y}$$
$$(z-z_0)^m f(z) = \frac{p(z)}{\lambda(z)}.$$

Esta función $\frac{p(z)}{\lambda(z)}$ es analítica en un entorno de z_0 ya que $\lambda(z_0) \neq 0$.

Calculando el límite

$$\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)^m f(z)] = \lim_{z\to z_0}\frac{p(z)}{\lambda(z)} = \frac{p(z_0)}{\lambda(z_0)} \neq 0$$

y $f(z)$ tiene un polo de orden m en z_0.

Recíprocamente, si $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ tiene en z_0 un polo de orden m se tiene que

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{\lambda(z)}{(z-z_0)^m},$$

con $\lambda(z_0) \neq 0$ y $\lambda(z)$ analítica en un entorno de z_0. Escribimos

$$q(z) = (z-z_0)^m \left[\frac{p(z)}{\lambda(z)}\right].$$

Esta función $\frac{p(z)}{\lambda(z)}$ es analítica en un entorno de z_0 ya que $\lambda(z_0) \neq 0$. Como $\dfrac{p(z_0)}{\lambda(z_0)} \neq 0$ entonces $q(z)$ tiene en z_0 un cero de orden m.

b) Por ser z_0 cero simple de $q(z)$, podemos escribir

$$q(z) = c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots = q'(z_0)(z-z_0) + \frac{q''(z_0)}{2}(z-z_0)^2 + \cdots,$$

con $c_1 = q'(z_0) \neq 0$. Así $\displaystyle\lim_{z\to z_0}\frac{q(z)}{z-z_0} = q'(z_0)$. Luego

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z), z_0] &= \lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)] = \lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)p(z)}{q(z)}\\ &= \frac{p(z_0)}{\lim_{z\to z_0}\left(\frac{q(z)}{z-z_0}\right)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.\end{aligned}$$

c) Se deja como ejercicio.

$\square$

Definición 16.3. Se dice que la función $f(z)$ es meromorfa en el dominio $\mathcal{D}$ si f es analítica en $\mathcal{D}$ excepto en un número finito de puntos, en los cuales tiene polos.

Ejemplo 16.6. Considere la función $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z^3(z-1)}$.

a) Obtenga 4 términos de la serie de Laurent de f en potencias de z.

b) Calcular $\displaystyle\int_C \frac{\operatorname{sen} z}{z^3(z-1)}\,\mathrm{d}z$, si C es la circunferencia $|z|=2$ recorrida en sentido positivo.

a) Escribiendo el desarrollo de Taylor de $\operatorname{sen} z$ (en $\mathbb{C}$) es

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots$$

Usando la serie geométrica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ en $|z|<1$ es

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n = -(1+z+z^2+z^3+\cdots].$$

Luego,

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{\operatorname{sen} z}{z}\frac{1}{(z-1)}\frac{1}{z^2}\\
&= -\frac{1}{z^2}\left[1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\cdots\right]\left[1+z+z^2+z^3+\cdots\right]\\
&= -\frac{1}{z^2}\left[1+z+\left(1-\frac{1}{6}\right)z^2+\left(1-\frac{1}{3!}\right)z^3+\cdots\right]\\
&= -\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}-\frac{5}{6}-\left(1-\frac{1}{3!}\right)z+\cdots
\end{aligned}$$

b) En $z=0$ hay un polo de orden 2 y

$$\operatorname{Res}[f,0] = c_{-1} = -1.$$

También

$$\operatorname{Res}[f,1] = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{\operatorname{sen} z}{z^3(z-1)}\right] = \lim_{z\to 1}\frac{\operatorname{sen} z}{z^3} = \operatorname{sen} 1.$$

Como $z_1=0$ y $z_2=1$ son los puntos singulares de f, será

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i[\operatorname{Res}(0)+\operatorname{Res}(1)] = 2\pi i[\operatorname{sen} 1 - 1].$$

Ejemplo 16.7. Calcule $\displaystyle\int_C \frac{z^2 e^{imz}}{(z^2+b^2)^2}\,\mathrm{d}z$ si C es la circunferencia $|z-bi|=b$, $b>0$ y m es un número real.

Los polos de $f(z)=\frac{z^2e^{imz}}{(z^2+b^2)^2}$ son $z_1=bi$ y $z_2=-bi$. Adentro, en la región encerrada por C, solo está z_1, que es el centro de la circunferencia. z_1 es un polo de orden 2, calculando el residuo de f en z_1 será

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z),bi] &= \lim_{z\to bi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{z^2e^{imz}}{(z+bi)^2}\right]\\ &= \lim_{z\to bi}\frac{2[z(z+bi)-z^2]e^{imz}}{(z+bi)^3} = \frac{e^{-mb}(1-mb)}{4ib}.\end{aligned}$$

Así,

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\operatorname{Res}(f,bi) = \frac{\pi(1-mb)e^{-mb}}{2b}.$$

Ejemplo 16.8. a) Clasifique los puntos singulares de la función $f(z)=\dfrac{(1-e^z)\operatorname{sen} z}{z^4(z+1)}$.

b) Hallar los residuos de f en cada uno de sus puntos singulares.

c) Calcule $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$, siendo C la circunferencia dada por $|z|=\frac{1}{3}$ en sentido positivo.

a) Escribimos

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen} z}{z} &= \frac{1}{z}\left[z-\frac{z^3}{3!}+\cdots\right]\\ &= 1-\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5!}z^4-\frac{1}{7!}z^6+\cdots.\end{aligned}$$

Además, de $e^z = 1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots$ es

$$\begin{aligned}\frac{1-e^z}{z} &= \frac{1}{z}\left[1-\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)\right]\\ &= -1-\frac{1}{2}z-\frac{1}{3!}z^2-\cdots\end{aligned}$$

Además sabemos que

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n = 1-z+z^2-z^3+\cdots$$

en $|z|<1$.

Así $f(z)$ en potencias de z (entorno de $z=0$) se escribe

$$f(z)=\left(\frac{1-e^z}{z}\right)\frac{\operatorname{sen} z}{z}\left(\frac{1}{z+1}\right)\frac{1}{z^2}=\frac{\lambda(z)}{z^2},$$

con $\lambda(0)=-1\neq 0$. Así, $f(z)$ tiene un polo de orden 2 en $z=0$. También, calculando su serie de Laurent es

$$\begin{aligned} f(z)&=\frac{1}{z^2}\left[\left(-1-\frac{1}{2}z-\frac{1}{3!}z^2-\cdots\right)\left(1-\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5!}z^4-\cdots\right)(1-z+z^2-z^3+\cdots)\right]\\ &=\frac{1}{z^2}\left[-1-\frac{1}{2}z+\cdots\right]=-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{z}+\cdots \end{aligned}$$

b) Así $f(z)$ tiene en $z=0$ un polo de orden 2 y $\operatorname{Res}[f,0]=\frac{1}{2}$.

Las funciones $\frac{1-e^z}{z}$ y $\frac{\operatorname{sen} z}{z}$ son analíticas[1], por lo que f tiene sólo 2 polos: en $z=0$, polo doble y en $z=-1$, polo simple. Calculamos,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f,-1]&=\lim_{z\to-1}\frac{(1-e^z)\operatorname{sen} z}{z^4}=(1-e^{-1})\operatorname{sen}(-1)\\ \operatorname{Res}[f,-1]&=\left(\frac{1-e}{e}\right)\operatorname{sen}(1). \end{aligned}$$

c) En el interior de $|z|=\frac{1}{3}$ sólo está el polo $z=0$, luego

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi i\operatorname{Res}[f,0]=2\pi i\frac{1}{2}=\pi i.$$

[1]en realidad, estas funciones no son analítica pero sólo tienen singularidades removibles (ambas en $z=0$). Así, ambas funciones pueden ser re-definidas analíticamente. Es una práctica muy frecuente el reemplazar (automáticamente) las funciones con sólo singularidades removibles por sus funciones redefinidas analíticamente.

Clase 17. Aplicaciones

El cálculo de residuos se puede usar en la evaluación de algunos tipos de integrales reales: trigonométricas e impropias.

17.1 Integrales Trigonométricas

Consideremos una integral de la forma $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} g(\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$, donde g es una función racional de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ que es acotada en el rango de integración. Con la sustitución $z = e^{i\theta}$ y una aplicación del Teorema de los Residuos, se puede evaluar I. De $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ y $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ se obtiene $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$ y $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. Luego,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{z^2-1}{2iz}, \quad \cos\theta = \frac{z^2+1}{2z}, \quad \mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}z}{iz}, \quad |z| = 1$$

y así

$$I = \int_{|z|=1} g\Big(\frac{z^2-1}{2iz}, \frac{z^2+1}{2z}\Big)\frac{\mathrm{d}z}{iz} = \int_C f(z)\,\mathrm{d}z,$$

donde C es la circunferencia $C(0,1)$ (recorrida en sentido anti-horario) y f es una función racional acotada en el rango de integración. Por el teorema de los residuos,

$$I = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Res}[f(z), z_n],$$

siendo $z_1, z_2, \ldots, z_N$ los polos de $f(z)$ que se encuentran en la región interior del círculo unitario $|z| \leq 1$.

17.2 Integrales Impropias

Evaluaremos integrales del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(mx)\,\mathrm{d}x$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\operatorname{sen}(mx)\,\mathrm{d}x$ para cierta clase de funciones f.

Definición 17.1. Sea p un número real. Se dice que la función f es del orden de $\frac{1}{z^p}$ (escribiremos $f(z) = \mathcal{O}(\frac{1}{z^p})$) si existe una constante real $k > 0$ tal que $|f(z)| \leq \frac{k}{|z|^p}$ cuando $|z|$ es suficientemente grande (es decir, cuando $|z| \geq M$ para alguna constante real $M > 0$).

Ejemplo 17.1. La función f definida por $f(z) = \frac{z^2+z-3}{3z^5+2z^2+9}$ se puede escribir como $f(z) = \dfrac{z^2(1+\frac{1}{z}-\frac{3}{z^2})}{z^5(3+\frac{2}{z^3}+\frac{9}{z^5})}$ y así $|f(z)| = \dfrac{|z|^2}{|z|^5}\dfrac{|1+\frac{1}{z}-\frac{3}{z^2}|}{3+\frac{2}{z^3}+\frac{9}{z^5}|}$, es decir, $|f(z)| \leq \frac{1}{|z|^3}$ cuando $|z|$ es suficientemente grande. Luego, $f(z) = \mathcal{O}(\frac{1}{z^3})$.

Teorema 17.1. *Sea $f(z)$ una funcón meromorfa en el semiplano superior complejo y continua en el eje real. Si $f(z) = \mathcal{O}(\frac{1}{z^p})$ con $p > 1$ entonces*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Res}[f(z), z_n],$$

donde $z_1, z_2, \ldots, z_N$ representan los polos de $f(z)$ que están en el semiplano superior complejo.

Demostración : Denotaremos con C_R la semicircunferencia superior $|z| = R$, $z(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Llamemos C la curva cerrada simple formada por C_R y el intervalo real $[-R, R]$. Tomando R suficientemente grande (de modo que los polos de f en el semiplano superior queden todos en la región encerrada por C) tenemos, gracias al teorema de los residuos,

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Res}[f(z), z_n].$$

Ahora probaremos que $\lim\limits_{R\to\infty} \displaystyle\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

En efecto,

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| &\leq \int_{C_R} |f(z)|\,|\,\mathrm{d}z| \leq \int_{C_R} \frac{k}{|z|^p}|\,\mathrm{d}z| = \int_{C_R} \frac{k}{R^p}|\,\mathrm{d}z| \\ &= \frac{k}{R^p}\int_{C_R} |\,\mathrm{d}z| = \frac{k}{R^p}\pi R = \frac{k\pi}{R^{p-1}}.\end{aligned}$$

Como $p > 1$, es $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ y así $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Res}[f(z), z_n]$. □

Las integrales del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(mx)\,\mathrm{d}x$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\operatorname{sen}(mx)\,\mathrm{d}x$ se evaluarán usando la integral de la forma $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{imx}\,\mathrm{d}x$ ya que de $e^{imx} = \cos(mx) + i\operatorname{sen}(mx)$ bastaría tomar la parte real y la parte imaginaria de esta última integral.

En la demostración del siguiente teorema usaremos dos resultados sencillos:

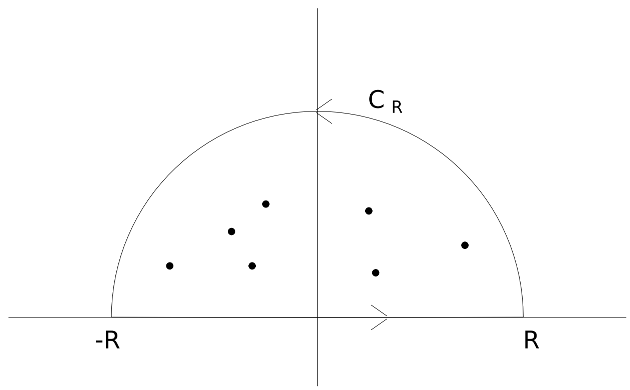

Figura 2: Todas las singularidades del semiplano superior quedan encerradas por C.

a) Desigualdad de Jordan.

Estudiando las funciones reales $h(x) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} x$, $g(x) = x$ en el intervalo real $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ se obtiene que $h(x) \geq g(x)$ (dibuje las gráficas). Así, $\theta \leq \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \theta$ y $\frac{2}{\pi} \leq \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} \leq 1$, de donde sigue la desigualdad de Jordan

$$\frac{2\theta}{\pi} \leq \operatorname{sen} \theta \leq \theta \quad \text{en } 0 \leq \theta \frac{\pi}{2}.$$

b) La integral real $\int_0^\pi e^{m \operatorname{sen} \theta}\, \mathrm{d}\theta$ ($m \in \mathbb{R}$) la escribimos como

$$\int_0^\pi e^{m \operatorname{sen} \theta}\, \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{m \operatorname{sen} \theta}\, \mathrm{d}\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{m \operatorname{sen} \theta}\, \mathrm{d}\theta.$$

Usando la sustitución $\theta = \pi - t$ obtenemos

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{m \operatorname{sen} \theta}\, \mathrm{d}\theta = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 e^{m \operatorname{sen}(\pi - t)}\, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{m \operatorname{sen} t}\, \mathrm{d}t.$$

Luego,

$$\int_0^\pi e^{m \operatorname{sen} \theta}\, \mathrm{d}\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{m \operatorname{sen} \theta}\, \mathrm{d}\theta.$$

Teorema 17.2. *Consideremos la función $f(z)$ meromorfa en el semiplano superior tal que $f(z) = \mathcal{O}(\frac{1}{z^p})$, con $p > 0$. Entonces para cada número real $m > 0$ es*

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} e^{imz} f(z)\, \mathrm{d}z = 0,$$

donde C_R es la semicircunferencia superior dada por $|z| = R$, $z(t) = Re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$.

Demostración : Para z en C_R, $z(t) = Re^{it} = R(\cos t + i \operatorname{sen} t)$. Así

$$\begin{aligned} |e^{imz}| &= |e^{imR(\cos t + i \operatorname{sen} t)}| = |e^{-mR \operatorname{sen} t}|\,|e^{imR\cos t}| \\ &= e^{-mR\operatorname{sen} t}. \end{aligned}$$

Como $f(z) = \mathcal{O}(\frac{1}{z^p})$, con $p > 0$, existen constantes reales positivas k y M tales que para $|z| \geq M$ es $|f(z)| \leq \frac{k}{|z|^p}$. Tomando R suficientemente grande ($R > M$) se cumple que para z en C_R es $|f(z)| \leq \frac{k}{R^p}$.

Luego,

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} e^{imz} f(z)\,\mathrm{d}z \right| &= \left| \int_0^{\pi} e^{imz(t)} f(z(t)) z'(t)\,\mathrm{d}t \right| \\ &= \left| \int_0^{\pi} e^{imz(t)} f(z(t)) Rie^{it}\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_0^{\pi} |e^{imz(t)}|\,|f(z(t))| R\,\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{k}{R^p} \int_0^{\pi} e^{-mR\operatorname{sen} t} R\,\mathrm{d}t = \frac{2k}{R^{p-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR\operatorname{sen} t}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

De la desigualdad de Jordan es $-\operatorname{sen} t \leq -\frac{2t}{\pi}$, sustituyendo quedaría

$$\frac{2k}{R^{p-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR\operatorname{sen} t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{2k}{R^{p-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-(\frac{2mR}{\pi})t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi k}{mR^p}(1 - e^{-mR}).$$

Luego, como $m > 0$ y $p > 0$ concluimos que $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{imz} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. □

Teorema 17.3. *Sea $f(z)$ una función meromorfa en el semiplano superior y continua en el eje real. Si $f(z) = \mathcal{O}(\frac{1}{z^p})$ con $p > 0$ entonces para cada número real $m > 0$ es*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{imx}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Res}[f(z)e^{imz}, z_n],$$

donde $z_1, z_2, \ldots, z_N$ denotan los polos de $f(z)$ que están en el semiplano superior.

Con el teorema17.2, la prueba es similar a la del teorema17.1, usando la curva cerrada $C = [-R, R] \cup C_R$.

Ejemplo 17.2. Calcular $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2 - \operatorname{sen}\theta}$.

Solución. Usando las fórmulas adecuadas

$$z = e^{i\theta}, \quad |z| = 1, \quad \mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}z}{iz}, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{z^2 - 1}{2iz},$$

se obtiene que

$$2 - \operatorname{sen}\theta = \frac{4iz - z^2 + 1}{2iz} \quad \text{y} \quad \frac{\mathrm{d}\theta}{2 - \operatorname{sen}\theta} = \frac{2\,\mathrm{d}z}{4iz - z^2 + 1}.$$

Luego,

$$I = \int_{|z|=1} \frac{(-2)\,\mathrm{d}z}{z^2 - 4iz - 1} = -2\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z^2 - 4iz - 1}.$$

Factorizando es $z^2 - 4iz - 1 = (z - z_1)(z - z_2)$, con $z_1 = (2 - \sqrt{3})i$ y $z_2 = (2 + \sqrt{3})i$. El punto z_2 está afuera y z_1 está adentro, en la región encerrada por $|z| = 1$.

Calculamos

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f, (2 - \sqrt{3})i] &= \lim_{z \to (2-\sqrt{3})i} (z - z_1)\left[\frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)}\right] = \lim_{z \to z_1} \frac{1}{z_1 - z_2} \\ &= \frac{1}{(2 - \sqrt{3})i - (2 + \sqrt{3})i} = -\frac{1}{2\sqrt{3}i}, \end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} I &= (-2)2\pi i \operatorname{Res}[f, z_1] = (-2)(2\pi i)\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}i}\right) \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Ejemplo 17.3. Calcule el valor de la integral

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{(1 + 2\cos\theta)^n e^{in\theta}}{5 - 4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

Solución. Con las fórmulas correspondientes

$$\cos\theta = \frac{z^2 + 1}{2z}, \quad z = e^{i\theta}, \quad \mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}z}{iz}, \quad |z| = 1,$$

será

$$1 + 2\cos\theta = \frac{z^2 + z + 1}{z} \quad \text{y} \quad 5 - 4\cos\theta = -\frac{2z^2 - 5z + 2}{z}.$$

Así

$$
\begin{aligned}
I &= -\int_{|z|=1} \frac{\frac{(z^2+z+1)^n}{z^n} z^n}{\frac{2z^2-5z+2}{z}} \frac{\mathrm{d}z}{iz} \\
&= -\frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{(z^2+z+1)^n}{2z^2-5z+2}\,\mathrm{d}z \\
&= -\frac{1}{2i}\int_{|z|=1} \frac{(z^2+z+1)^n}{(z-2)(z-\frac{1}{2})}\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}
$$

El punto $z_1 = \frac{1}{2}$ está adentro, en la región interior a $|z| = 1$ y el punto $z_2 = 2$ está afuera. Calculamos

$$
\operatorname{Res}\left[f, \frac{1}{2}\right] = \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{(z^2+z+1)^n}{z-2} = \frac{(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1)^n}{\frac{1}{2}-2} = -\frac{2}{3}\left(\frac{7}{4}\right)^n.
$$

De aquí

$$
\begin{aligned}
I &= \left(-\frac{1}{2i}\right) 2\pi i \operatorname{Res}\left[f, \frac{1}{2}\right] = \left(-\frac{1}{2i}\right) 2\pi i \left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{7}{4}\right)^n \\
&= \frac{2\pi}{3}\left(\frac{7}{4}\right)^n.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 17.4. Calcular $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+9)(x^2+1)^2}$.

Solución. La función $f(z) = \frac{1}{(z^2+9)(z^2+1)^2}$ es meromorfa en el semiplano superior con polos $z = 3i$ (polo simple) y $z = i$ (polo doble). Además, $f(z) = \mathcal{O}(\frac{1}{z^p}) = \mathcal{O}(\frac{1}{z^6})$, con $p = 6 > 1$ y f es continua en el eje real. Aplicando el teorema correspondiente es $I = 2\pi i[\operatorname{Res}(f, 3i) + \operatorname{Res}(f, i)]$. Calculamos

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f, 3i) &= \lim_{z\to 3i}\left[\frac{1}{(z+3i)(z^2+1)^2}\right] = \frac{1}{6\cdot 64 i} \\
\operatorname{Res}(f, i) &= \lim_{z\to i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{1}{(z^2+9)(z+i)^2}\right] = \frac{3}{128}\frac{1}{i}.
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
I = 2\pi i\left[\frac{1}{6\cdot 64} + \frac{3}{128}\right]\frac{1}{i} = \frac{5\pi}{96}.
$$

Ejemplo 17.5. Calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x$.

Solución. Para aplicar el teorema correspondiente, calculamos $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x$, $m = 1$.

Vemos que $f(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2}$ es del orden de $f(z) = \mathcal{O}(\frac{1}{z^4})$. f es meromorfa en el semiplano superior, con polo doble en $z = 2i$ y continua en el eje real. Calculamos

$$\mathrm{Res}[f(z), e^{iz}, 2i] = \lim_{z\to 2i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{e^{iz}}{(z+2i)^2}\right] = -\frac{3}{32} i e^{-2}.$$

Luego, $I = 2\pi i \,\mathrm{Res}[(f(z)e^{iz}, 2i] = \dfrac{3\pi}{16} e^{-2}$. Tomando parte real es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}[I] = \frac{3\pi}{16} e^{-2}.$$